

УДК: 636.52/.58: 57: 51

## ОТРИМАННЯ ФУНКЦІЇ КРИВОЇ РОСТУ ЖИВИХ ОРГАНІЗМІВ ДЛЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДАНИХ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Іщенко Ю. Б., e-mail: avian@meta.ua

Інститут птахівництва Української академії аграрних наук

**Резюме.** Для інтерполяції даних кривої росту живих організмів запропонована функція:

$$Y(t) = (C + D \cdot E^t)^N.$$

Початкові значення коефіцієнтів:  $C = 0$ ;  $D = 1$ ;  $E = 1$ ;  $N = -1$ .

Обмеження:  $C > 0$ ;  $D > 0$ ;  $E > 0$ ;  $N < 0$ .

Уточнення результатів наближення кривої до стандарту, за критерієм найменших квадратів, досягається шляхом зменшення  $N$  після кожного циклу інтерполяції.

Для бройлерів кросу «Гібро Г<sup>+</sup>», за даними стандарту, отримані наступні коефіцієнти:

- для курей  $C=0,983392$ ;  $D=0,008849$ ;  $E=0,95484$ ;  $N=-500$ ;

- для півнів  $C=0,983025$ ;  $D=0,00913$ ;  $E=0,957328$ ;  $N=-500$ .

Відносна похибка інтерполяції не перевищувала 1,8 %.

Стандартне відхилення середньої відносної похибки менше ніж 3,5 %.

**Ключові слова:** біологія, криві росту, прогнозування, наближення даних, інтерполяція, числові методи, нелінійне програмування, Microsoft Excel, пошук рішень, бройлери.

**Summary.** For interpolation of data of the curve of the living organism growth it is offered a function:

$$Y(t) = (C + D \cdot E^t)^N.$$

Initial values of coefficients are:  $S = 0$ ;  $D = 1$ ;  $E = 1$ ;  $N = -1$ .

Limitation:  $S > 0$ ;  $D > 0$ ;  $E > 0$ ;  $N < 0$ .

The clarification of results of the curve approach to the standard, after the criterion of the least squares, is achieved by diminishing of  $N$  after every cycle of interpolation.

For the broilers of the cross «Gybro G<sup>+</sup>» according to the standard data the followings coefficients are obtained:

- for hens  $C=0,983392$ ;  $D=0,008849$ ;  $E=0,95484$ ;  $N=-500$ ;

- for cocks  $C=0,983025$ ;  $D=0,00913$ ;  $E=0,957328$ ;  $N=-500$ .

The relative error of interpolation did not exceed 1,8 %.

The standard deviation of the mean relative error is less than 3,5 %.

**Key words:** biology, curves of the growth, forecasting, approach of data, interpolation, numerical methods, nonlinear programming, Microsoft Excel, search of decisions, broilers.

**Вступ.** Сучасні методи селекції тварин передбачають використання методів прогнозування живої маси. Від результатів прогнозу залежить якість досліджень та водночас економія часу і коштів на проведення робіт.

Дослідниками минулого була вивчена динаміка росту живих організмів та запропоновані емпіричні формули, що описують криві їх росту. Бенджамін Гомпертц (1779 – 1865) та Людвіг фон Берталанфі (1901 – 1972) запропонували теорію росту на основі синтезу та розпаду речовин, С. Броди, Т. Робертсон, В. Освальд – фізико-хімічну теорію росту. Є інші теорії [5].

Для прогнозування маси в будь-який момент часу на заданому інтервалі необхідно виконати наближення (інтерполяцію) обраної функції до експериментальних даних. Запропоновані вченими-дослідниками емпіричні формули є складними математичними функціями з декількома коефіцієнтами. За певних числових значень коефіцієнтів ці функції можуть бути не визначеними. Застосовуючи числові методи наближення кривих [2], необхідно встановити додаткові умови для визначеності апроксимуючої функції [4, 7]. Тому пошук функції для найкращого відображення досліджуваної залежності, визначення початкових умов та підходів для розв'язання таких задач є актуальним [5].

Один із методів наближення кривих є метод Ньютона [2, 6, 7, 8], що застосовують для нелінійної інтерполяції. Цей метод реалізований в багатьох комп'ютерних програмах, у тому числі і у програмі Excel пакету Microsoft Office, доступного для більшості дослідників [1].

Метою роботи, представленої в статі, є пошук функції кривої росту живих організмів для інтерполяції даних методом Ньютона та визначення підходів щодо його здійснення в програмі Microsoft Excel.

**Матеріали та методи.** Для вивчення кривих росту живих організмів Берталанфі запропонував функцію [5]

$$Y(t) = \frac{A}{(1+be^{-kt})^{\frac{1}{n}}}, \text{ де} \quad (1)$$

$Y(t)$  – функція зміни маси;

$A, b, k, n$  – коефіцієнти, характерні для кривої росту живого організму;

$e$  - математична стала;

$t$  – термін часу визначення живої маси об'єкта, доба.

Для спрощення функції (1) виконаємо наступні перетворення:

$$Y(t) = \frac{A}{(1+be^{-kt})^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{A} \sqrt[n]{1+be^{-kt}}} = \left( (A)^{-n} + (A)^{-n} \cdot b \cdot (e^{-k})^t \right)^{-\frac{1}{n}},$$

здійснивши заміну:

$$C = (A)^{-n}; D = b \cdot C; E = e^{-k}; N = -\frac{1}{n}, \quad (2)$$

отримаємо формулу:

$$Y(t) = (C + D \cdot E^t)^N, \quad (3)$$

де  $C, D, E, N$  – нові коефіцієнти для характеристики кривої росту живого організму.

Отримана формула є зміною формули Бергаланфі, тому можливе зворотнє перетворення коефіцієнтів  $C, D, E, N$  до коефіцієнтів  $A, b, k, n$ :

$$n = -\frac{1}{N}, A = \frac{1}{\sqrt[n]{C}}; b = \frac{D}{C}; k = -\ln E \quad (4)$$

Визначимо початкові умови та обмеження для обраного методу інтерполяції даних за формулою (3).

Щоб отримати значення  $Y(t) > 0$ , встановимо умови  $D > 0, E > 0$ .

При дробових числових значеннях змінної  $N$  для від'ємних значень виразу  $(C + D \cdot E^t)$  функція  $Y(t)$  не визначена. Тому для забезпечення стійкості інтерполяції прийматимемо значення  $N$  цілими. Взевши  $N=1$ , функція  $Y(t)$  не залежить від змінної  $t$ , але після першого ж циклу наближення даних виконається умова  $N \neq 1$  і інтерполяція продовжиться.

Для перевірки отриманої формули та початкових умов інтерполяції візьмемо дані залежності живої маси від часу для бройлерів кросу «Гібро  $\Gamma^+$ » з терміном вирощування 49 днів [3], що наведені у таблиці 1.

**Таблиця 1** - Динаміка живої маси  $Y_0(t)$  від часу ( $t$ ) для бройлерів кросу «Гібро  $\Gamma^+$ »

Доба	Маса, г		Доба	Маса, г		Доба	Маса, г	
	Кури	Півні		Кури	Півні		Кури	Півні
1	52	53	18	621	638	35	1772	1902
2	66	67	19	678	698	36	1845	1985
3	81	82	20	736	760	37	1918	2068
4	98	99	21	797	824	38	1990	2151
5	116	118	22	859	890	39	2062	2234
6	138	140	23	922	958	40	2133	2317
7	162	165	24	986	1028	41	2201	2399
8	190	193	25	1053	1100	42	2269	2480
9	220	224	26	1122	1174	43	2336	2561
10	253	258	27	1191	1250	44	2403	2641
11	289	295	28	1261	1328	45	2468	2720
12	328	335	29	1333	1408	46	2534	2798
13	370	378	30	1406	1489	47	2598	2875
14	414	424	31	1480	1571	48	2660	2951
15	462	473	32	1552	1653	49	2722	3026
16	512	525	33	1626	1736	-	-	-
17	565	580	34	1699	1819	-	-	-

Абсолютне відхилення наближеної величини  $Y(t)$  від  $Y_0(t)$  визначається формулою:

$$\Delta Y(t) = Y(t) - Y_0(t). \quad (5)$$

При використанні критерію найменших квадратів потрібно знайти суму квадратів різниці:

$$W = \sum_{i=1}^K [(\Delta Y_i(t_i))^2] \Rightarrow \min, \quad (6)$$

де  $K$  – кількість даних  $Y_0$  для кожного  $i$ -го значення  $t$ .

Відносна похибка наближення  $Y(t)$  до  $Y_0(t)$  для  $i$ -ї величини визначається як

$$\delta_i = \frac{|\Delta Y_i(t_i)|}{Y_0(t_i)} \cdot 100\% \quad (7)$$

Середня відносна похибка:

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^K \delta_i}{K} \quad (8)$$

Стандартне відхилення середньої відносної похибки відобразить різницю значень відносних похибок для всіх отриманих  $Y(t_i)$ :

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K (\delta_i - \bar{\delta})^2}{(K-1)}} \quad (9)$$

**Результати.** Початкові дані, формули та умови інтерполяції даних були введені на робочий лист програми Microsoft Excel та налаштований механізм пошуку рішень (рис. 1, 2).

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data table:

	A	B	C	D	E	F
3	t	$Y_0$	Y	$Y - Y_0$	$(Y - Y_0)^2$	$100\% \cdot \text{abs}(Y - Y_0) / Y_0$
4	1	52				
5	2	66				
6	3	81				
7	4	98				
8	5	116				
9	6	138				
10	7	162				
11	8	190				
12	9	220				
13	10	253				
14	11	289				
50	47	2598				
51	48	2660				
52	49	2722				

The Solver dialog box is open, showing the following settings:

- Установить целевую ячейку:  $\$E\$57$
- Равной:  максимальному значению  значению: 0  минимальному значению
- Изменяя ячейки:  $\$B\$61:\$D\$61$
- Ограничения:  $\$C\$61:\$D\$61 \geq 0,001$

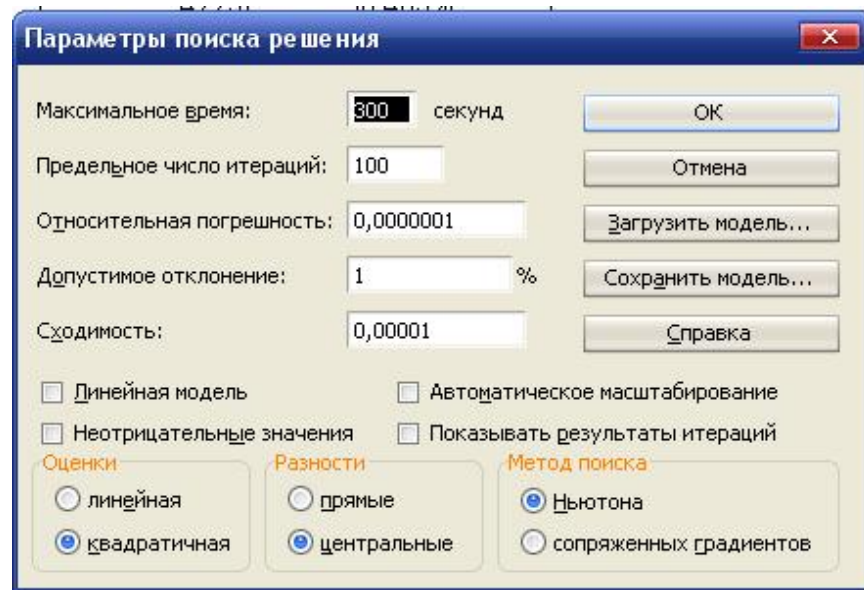
Summary statistics at the bottom of the spreadsheet:

Средняя відносна похибка	99,728%
Стандартне відхилення відносної похибки	0,401%

Below the summary statistics, there is a table with the formula  $W = 103206736$  and a small table:

	C	D	E	N
	0	1	1	1

**Рис. 1.** Лист Microsoft Excel з введеними даними та формулами для виконання інтерполяції кривої росту бройлерів



**Рис.2.** Параметри налаштування механізму пошуку рішень

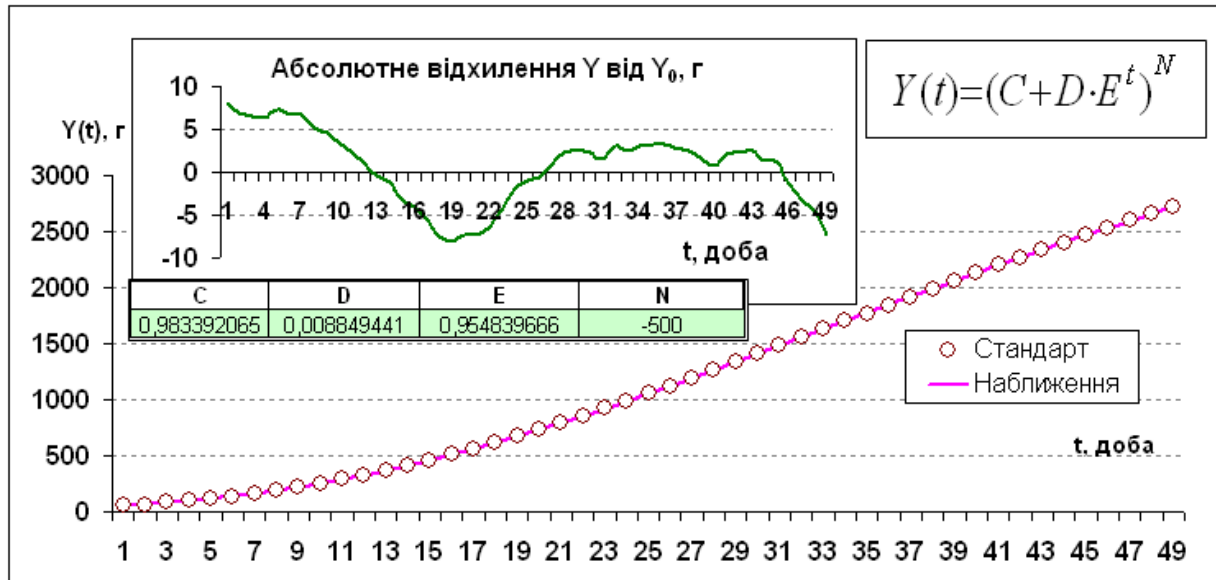
Отримані результати інтерполяції даних для кривої росту курей «Гібро Г<sup>+</sup>», при різних значеннях  $N$ , наведені у таблиці 2.

**Таблиця 2** - Результати інтерполяції даних кривої росту курей бройлерів кросу «Гібро Г<sup>+</sup>»

Цикл набли- ження	N	C	D	E	W	$\delta$ , %	S, %
Початок	1	0	1	1	-	-	-
1	-1	0,000323	0,008951	0,901015	67 327,02	13,355	26,928
2	-2	0,017012	0,092855	0,927337	24 708,51	8,135	16,653
3	-3	0,064923	0,174677	0,93638	13 858,75	6,094	12,525
4	-4	0,127532	0,221705	0,94096	9 381,26	5,010	10,305
5	-5	0,191656	0,243896	0,943727	7 050,48	4,342	8,919
6	-10	0,435517	0,232376	0,949308	3 294,58	2,955	6,022
7	-20	0,658952	0,16111	0,952123	1 919,20	2,235	4,510
8	-30	0,756976	0,119863	0,953065	1 541,81	1,992	3,997
9	-40	0,811432	0,094981	0,953536	1 368,92	1,870	3,738
10	-50	0,846005	0,078539	0,953819	1 270,31	1,796	3,582
11	-100	0,919723	0,041959	0,954386	1 084,78	1,649	3,270
12	-200	0,959006	0,021687	0,95467	997,92	1,575	3,113
13	-300	0,972477	0,014619	0,954764	969,85	1,550	3,060
14	-400	0,979284	0,011025	0,954811	955,99	1,537	3,033
Результат	-500	0,983392	0,008849	0,95484	947,72	1,530	3,017

З наведених вище результатів видно, що відносні похибки інтерполяції даних за формулою (3) зменшуються із зменшенням  $N$  при кожному наступному циклі наближення. Для початкових значень можна взяти  $N = -1$ .

За даними табл. 2 побудовані криві росту півнів кросу «Гібро Г<sup>+</sup>» та зміни абсолютного відхилення інтерпольованої величини від стандарту (рис. 3).



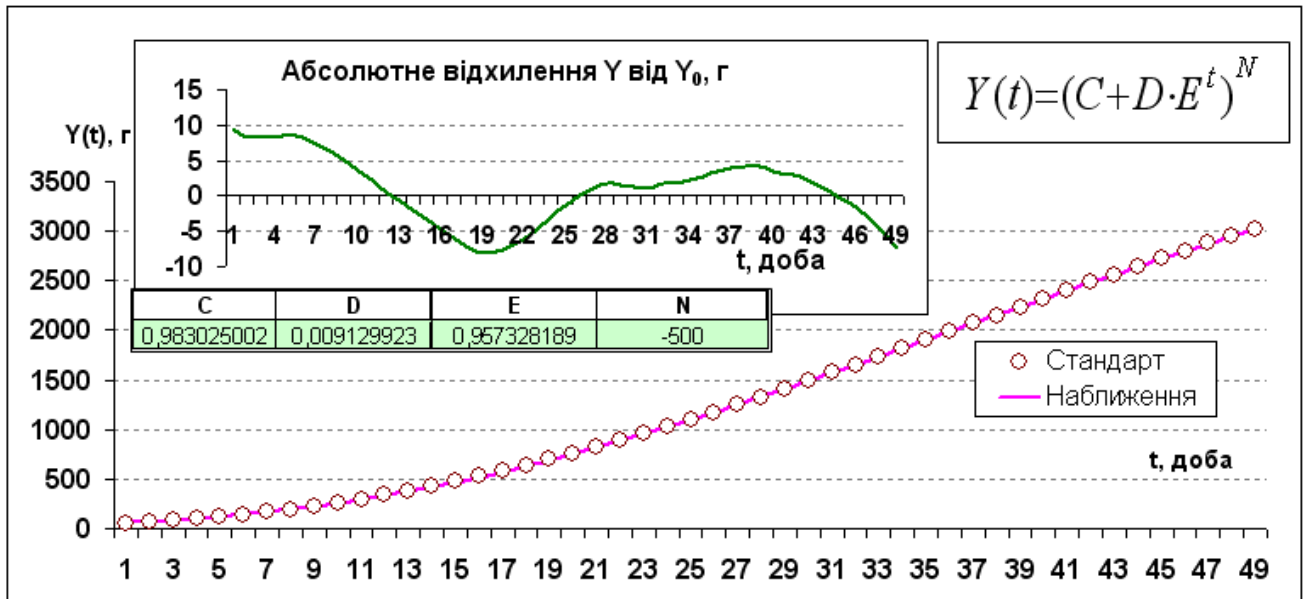
**Рис. 3.** Графіки функції кривої росту курей бройлерів кросу «Гібро Г<sup>+</sup>» та абсолютного відхилення інтерполяції даних від стандарту

Отримані результати інтерполяції даних для кривої росту півнів кросу «Гібро Г<sup>+</sup>», при різних значеннях  $N$ , наведені у таблиці 3.

**Таблиця 3** - Результати інтерполяції даних кривої росту для півнів бройлерів кросу «Гібро Г<sup>+</sup>»

Цикл наближення	N	C	D	E	W	δ, %	S, %
Початок	-1	0,000283	0,008649	0,902258	76674,03	13,959	28,093
1	-2	0,015801	0,091898	0,929183	28429,22	8,583	17,584
2	-3	0,061624	0,174737	0,938437	16071,66	6,479	13,349
3	-4	0,12247	0,223173	0,943123	10948,80	5,357	11,072
4	-5	0,185402	0,246527	0,945955	8272,07	4,662	9,651
5	-10	0,427958	0,237093	0,951667	3930,19	3,226	6,675
6	-20	0,653028	0,165268	0,954548	2320,91	2,483	5,118
7	-30	0,752381	0,123192	0,955512	1875,12	2,233	4,588
8	-40	0,807715	0,097716	0,955995	1669,89	2,107	4,321
9	-50	0,842892	0,080849	0,956285	1552,50	2,031	4,161
10	-100	0,918018	0,043245	0,956865	1330,77	1,879	3,838
11	-200	0,958113	0,022366	0,957156	1226,51	1,802	3,676
12	-300	0,971872	0,01508	0,957252	1192,74	1,777	3,621
13	-400	0,978827	0,011374	0,9573	1176,04	1,764	3,593
Результат	-500	0,983025	0,00913	0,957328	1166,09	1,755	3,575

За даними табл. 3 побудовані криві росту півнів кросу «Гібро Г<sup>+</sup>» та зміни абсолютного відхилення інтерпольованої величини від стандарту (рис. 4).



**Рис. 4.** Графік функції кривої росту півнів бройлерів кросу «Гібро Г<sup>+</sup>» та абсолютного відхилення інтерполяції даних від стандарту

Для перевірки формули (3) розрахуємо значення  $A$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $n$  функції Берталанфі за перетвореннями (4) з даних таблиць 2 і 3, та знайдемо відносну похибку наближення кривої до стандарту (табл. 1). Результати наведені в табл. 4.

**Таблиця 4** - Коефіцієнти функції Берталанфі для кривих росту бройлерів кросу «Гібро Г<sup>+</sup>» та відносна похибка наближення кривої до стандарту

	$A$	$b$	$k$	$n$	$\delta, \%$	$S, \%$
Кури	5220,571863	0,009287579	0,043609011	0,002	1,530%	3,017%
Півні	4331,61771	0,008998894	0,046211842	0,002	1,755%	3,575%

Перевірка значень  $Y(t)$ , отриманих за формулою Берталанфі, підтвердила розрахунки і показала той же результат середньої відносної похибки інтерполяції.

#### Висновки

1. При вивченні кривих росту живих організмів запропоноване спрощення функції Берталанфі для інтерполяції даних методом Ньютона

$$Y(t) = (C + D \cdot E^t)^N,$$

де  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $N$  – коефіцієнти.

2. Отримана функція спрощує визначення початкових умов для інтерполяції даних кривої росту.

Початкові значення коефіцієнтів:  $C = 0$ ;  $D = 1$ ;  $E = 1$ ;  $N = -1$ ;

Обмеження:  $C > 0$ ;  $D > 0$ ;  $E > 0$ ;  $N < 0$ .

3. Уточнення результатів наближення кривої до стандарту досягається шляхом зменшення  $N$  після кожного циклу інтерполяції.

4. Запропонована функція може бути використана для опису кривих росту живих організмів та в комп'ютерних програмах наближення даних і прогнозування результатів.

5. Комп'ютерна програма Excel, що входить до пакету Microsoft Office, дозволяє на високому рівні вирішувати задачі наближення даних, що рекомендує її для використання в наукових дослідженнях.

### Список літератури

1. Блатнер Патрик Использование Microsoft Excel 2000 : учебное пособие / Блатнер П. – М.: Издат. дом «Вильямс», 2000. – 1024 с.

2. Калиткин Н. Н. Численные методы в прикладной математике : учебное пособие / Калиткин Н. Н. – М.: Наука, 1978. – 800 с.

3. Гибро. Бройлеры. Руководство по содержанию. – М.: Московское представительство «Hibro», 2007. – 48 с.

4. Сахарников Н. А. Высшая математика / Сахарников Н. А. – Л.: Издат. Ленинградского университета, 1973. – 472 с.

5. Седова Г. П. Закономерности роста биологических объектов. Математическая морфология // Электронный математический и медико-биологический журнал.- 2004. –Т.5.- Режим доступа: <http://www.smolensk.ru/user/mmorph>.

6. Фролов В. А. Анализ и оптимизация в прикладных задачах конструирования РЭС / Фролов В. А.: учеб. пособие. – К.: Выща школа, 1991. – 310 с.

7. Hartler H. O. The modified Gauss-Newton method for the fitting of nonlinear regression functions by least squares / H. O. Hartler // Technometrics.- 1961.– V. 3.– P. 269–280.

8. Fitzhugh H. Analysis of growth curves and strategies for altering their shape / H. Fitzhugh // Journal of Animal Science.- 1976.– V. 42, N. 4.– P. 1036–1051.